6. The Solow model

**6.1** Suppose an economy which functions in accordance with the hypotheses of the Solow model and which is currently *below* its steady-state in terms of capital per worker and output per worker.

a) Draw the Solow diagram and represent the current situation of this economy.

**Primeira nota prévia: utilizamos sempre letras maiúsculas (K, Y,…) para designar os stocks ou fluxos agregados totais e as letras minúsculas (k, y,…) para designar os stocks ou fluxos *por trabalhador*.**

**Desenhar passo a passo o diagrama de Solow (este aqui em baixo mas acrescentem a função de produção, que neste não está – temos apenas a função de poupança/investimento e a semireta do investimento necessário), recordando a expressão matemática correspondente a cada curva ou semi-reta e a sua lógica económica: a função de produção por trabalhador é côncava por causa da produtividade marginal decrescente do capital físico; a função de poupança/investimento tem a mesma forma porque é uma proporção s da produção y; a função do investimento necessário é linear porque em cada período uma determinada *proporção* (n+δ) do stock de capital físico por trabalhador existente perde-se para a depreciação δ ou dilui-se no crescimento populacional n, independentemente desse stock ser pequeno ou grande.**

****

**Em seguida, indicar a situação correspondente à situação atual (k0 nesta imagem, à esquerda de k\*). Mostrar como a k0 corresponde um y0 inferior ao y\* de estado estacionário. Eventualmente, mostrar a parte de y que corresponde a poupança/investimento por trabalhador (dada pela função s.y) e a parte que corresponde a consume por trabalhador (distância vertical da função de investimento até à função de produção).**

b) According to the model, what will tend to happen to this economy in the short-run and the long-run? Explain the economic mechanisms that will bring about these outcomes.

**Em k0, o investimento realizado (dado pela curva do investimento s.y) é superior ao investimento necessário para compensar a depreciação e crescimento populacional (dado pela semireta (n+ δ)\*k ). Logo, haverá investimento líquido por trabalhador positivo e, no curto prazo, haverá crescimento económico (acumulação de capital por trabalhador e crescimento da produtividade do trabalho). No longo prazo, após a ação do mecanismo de ajustamento, a economia chegará ao estado estacionário k=k\*, com y=y\* e deixará de haver crescimento económico intensivo (isto é, em termos de k e y). Haverá apenas crescimento extensivo (em termos de K e Y), de modo a acompanhar o crescimento de L.**

**6.2** Suppose an economy which functions in accordance with the hypotheses of the Solow model and which is currently in its steady state.

a) Draw the Solow diagram and represent the current situation of this economy.

**Idêntico ao exercício anterior, mas agora já estamos no estado estacionário. Verificar que os estudantes sabem todos desenhar o gráfico e interpretá-lo economicamente por eles mesmos.**

b) Suppose the following changes occur in this economy (each one in its turn, i.e. not all at once, and ceteris paribus). Represent the corresponding graphical shifts and describe the consequences to the economy in the short-run and the long-run:

 i. a decrease in the savings rate; **A função de investimento roda para baixo. A interseção entre sy e (n+ δ)k que define o estado estacionário passa a ocorrer a um nível de k mais reduzido. A economia passa a estar momentaneamente acima do estado estacionário, pelo que no curto prazo irá sofrer uma redução de k e y, até chegar ao novo estado estacionário. Nessa altura (no longo prazo), k e y não se alteram (apenas K e Y).**

 ii. a positive change in the available technologies; **A função de produção roda para cima e a função de investimento acompanha-a no mesmo sentido, dado ser uma proporção s de y. A interseção entre sy e (n+ δ)k que define o estado estacionário passa a ocorrer a um nível de k mais elevado. A economia passa a estar momentaneamente abaixo do estado estacionário, pelo que no curto prazo irá sofrer um aumento de k e y, até chegar ao novo estado estacionário. Nessa altura (no longo prazo), k e y não se alteram (apenas K e Y).**

 iii. an increase in the depreciation rate; **A função do investimento necessário (n+ δ)k roda para cima. A interseção entre sy e (n+d)k que define o estado estacionário passa a ocorrer a um nível de k mais baixo. A economia passa a estar momentaneamente acima do estado estacionário, pelo que no curto prazo irá sofrer uma redução de k e y, até chegar ao novo estado estacionário. Nessa altura (no longo prazo), k e y não se alteram (apenas K e Y).**

 iv. a decrease in the population growth rate; **A função do investimento necessário (n+d)k roda para baixo. A interseção entre sy e (n+ δ)k que define o estado estacionário passa a ocorrer a um nível de k mais alto. A economia passa a estar momentaneamente abaixo do estado estacionário, pelo que no curto prazo irá sofrer um aumento de k e y, até chegar ao novo estado estacionário. Nessa altura (no longo prazo), k e y não se alteram (apenas K e Y).**

v. a sudden reduction in the available stock of physical capital per worker, e.g. due to a natural disaster; **O diagrama não se altera, i.e., nenhuma das curvas ou retas se altera. O que se altera é o ponto em que estamos. Em vez de estarmos no estado estacionário k=k\*, passamos a estar em k’<k\*, já que a um mesmo L corresponde um menor K. No curto prazo, a economia irá assim sofrer um aumento de k e y, até chegar ao novo estado estacionário. Nessa altura (no longo prazo), k e y não se alteram (apenas K e Y).**

vi. a one-off increase in the population, e.g. due to a sudden inflow of refugees. **Idêntico ao anterior, só que k=K/L reduz-se devido ao aumento pontual de L e não à redução pontual de K. O efeito**

**6.3** Suppose an economy which functions in accordance with the hypotheses of the Solow model and is adequately described by the following Cobb-Douglas production function:

*Y* = 0,2.*K*α.*L*1−α

Further assume that the population is growing at an annual rate of 0.5%, the depreciation rate of physical capital is 4%, the investment rate is 25% and the partial elasticity of GDP with respect to physical capital is 0.6. For simplification, assume also that the total population, labour force and employed population are identical.

a) Formalize the model which represents the functioning of this economy and find the steady state level of physical capital per worker. Represent this graphically.

**Dizer aos estudantes que ajuda sempre sistematizar toda a informação dada pelo enunciado:**

***Y* = 0,2.*K*α.*L*1−α**

**n=0.005**

**δ=0.04**

**s=0.25**

**α=0.6 (elasticidade parcial do produto em relação ao capital físico)**

**A incognita é k\*=?**

***Y* = 0,2.*K*0.6.*L*0.4**

**y = 0.2.k0.6**

**Condição de equilíbrio: sy = (n+δ).k**

**0.25.(0.2.k0.6) = (0.005+0.04)k**

**0.05k0.6 = 0.045k**

**0.05k0.6 - 0.045k = 0**

**k.(0.05k-0.4 - 0.045) = 0**

**k=0 V 0.05k-0.4 - 0.045 (queremos a segunda solução; a primeira é trivial e ocorre na origem: quando k=0, o investimento é nulo e o investimento necessário também)**

**k-0.4 = 0.045/0.05**

**k = (0.045/0.05) –(1/0.4)**

**k\* = 1.3**

**Gráfico habitual do modelo de Solow, com interseção em k\*=1.3**

b) Find the steady state levels of GDP per worker, consumption per worker and investment per worker. Represent these values graphically.

**GDP per worker\* = y\* = 0.2.k\*0.6 = 0.2.(1.3) 0.6 = 0.234~**

**Consumption per worker\* = C\*/L = (1 – s).y\* = 0.75\*0.234 = 0.176**

**Investment per worker\* = I\*/L = s.y\* = 0.25\*0.234 = 0.059**

****

c) With everything else constant, what will be the effect upon the steady state of an increase in the population growth rate to 1%? Represent this change graphically.

**De n = 0.05 passamos para n´ = 0.01**

**A nova solução é:**

**0.25.(0.2.k0.6) = (0.01+0.04)k**

**0.05k0.6 = 0.05k**

**0.05k0.6 - 0.05k = 0**

**k.(0.05k-0.4 - 0.05) = 0**

**k=0 V 0.05k-0.4 - 0.05 (queremos a segunda)**

**k-0.4 = 0.05/0.05**

**k = 1**

****

**Assinalar como o resultado algébrico (nova solução de k\*) é consistente com o esperado graficamente, dada a rotação da semireta (n+ δ)k em resultado do aumento de n para n’, provocando uma interseção com s.y à esquerda (abaixo) do equilíbrio original.**

d) With everything else constant, what will be the effect upon the steady state of an increase in the investment rate to 30%? Represent this change graphically.

**De s = 0.25 passamos para s´ = 0.3. Tudo o resto, incluindo n = 0.005, permanece igual ao exercício original.**

**A nova solução é dada por:**

**0.3\*(0.2.k0.6) = (0.005+0.04)k**

**0.06k0.6 = 0.045k**

**0.06k0.6 - 0.045k = 0**

**k.(0.06k-0.4 - 0.045) = 0**

**k=0 V 0.06k-0.4 - 0.045 (queremos a segunda)**

**k-0.4 = 0.045/0.06**

**k = 2.05**

****

**Assinalar como o resultado algébrico (nova solução de k\*) é consistente com o esperado graficamente, dada a rotação para cima da curva s.y em resultado do aumento da taxa de poupança provocar uma interseção com (n+ δ)\*k à direita (acima) do equilíbrio original.**

**6.4**. Consider an economy which functions in accordance with the Solow model and which is adequately described by the production function Y = 0,4.Kα.L1−α. Assume that the partial elasticity of GDP with respect to physical capital is 0.4, the population growth rate is 1% and capital depreciates at 5% per annum.

a) Find what the investment rate must be if the steady state level of physical capital per worker is *k\** = 2.5?

**Sistematizar todos os dados do enunciado:**

**n=0.01**

**δ=0.05**

**α=0.4**

**s=? (A nossa incógnita não é agora o nível de estado estacionário de k associado a níveis dados de s, n e δ, mas sim o nível de s associado a um dado nível de k de estado estacionário, sendo adicionalmente dados n e δ.**

**k\*=2.5**

***Y* = 0,4.*K*0.4.*L*0.6**

**y = 0.4.k0.4**

**Condição de equilíbrio: sy = (n+δ).k**

**s\*[0.4\*(2.5)0.4] = (0.01+0.05)\*2.5**

**s\*0.5771 = 0.15**

**s = 0.26 = 26%**

b) If *k* is indeed at *k\**  = 2.5, what is the growth rate of GDP?

**A pergunta exige apenas raciocinar teoricamente e não requer cálculos. Se *k*=*k*\*, significa que a economia já está no estado estacionario. Assim sendo, o produto/PIB/Y cresce apenas extensivamente, à taxa n = 0.01, aconpanhando o crescimento de L, de modo que o produto por trabalhador y=Y/L permaneça constante, como é propriedade do estado estacionário.**